a

Pierwiastkowanie

Podczas gdy humaniści będą szukać pierwiastka dobra w potępionych niegodziwcach, chemicy brakujących pierwiastków w tablicy Mendelejewa, my zajmiemy się poszukiwaniem pierwiastków liczb w naszym odrealnionym świecie. Tak jak odejmowanie jest odwrotnością dodawania, dzielenie jest odwrotnością mnożenia, tak pierwiastkowanie to odwrotność potęgowania.

Potęga na opak

Intuicje

Maciuś uzbierał w skarbonce 80 zł na nowy zestaw Lego, a teraz chce naciągnąć rodziców na taką kwotę, żeby w sumie wyszło 130 zł na mega statek kosmiczny.[[1]](#footnote-1)

Aby poznać brakujący składnik, Maciuś musi wykonać odejmowanie, czyli spojrzeć na dodawanie od drugiej strony.

Rok później przyjaciele Maciusia postanowili kupić mu na urodziny zestaw małego architekta[[2]](#footnote-2) za 200 zł. Było ich pięcioro, a każdy z nich powinien mieć równy wkład w prezent. Powstało pytanie, po ile powinni się złożyć:

Odpowiedź przynosi wykonanie dzielenia:

Maciuś, szczęśliwy posiadacz od groma klocków, postanowił zbudować dzieło swojego życia: ogromną, wypełnioną w środku bryłę w sześciennym kształcie. Oczywiście Maciuś wie, że idealna bryła powinna mieć tyle samo klocków wysokości, szerokości i głębokości. Ponieważ Maciuś nigdy nie był normalnym dzieckiem, postanowił najpierw policzyć, ile ma klocków, aby zdecydować się co do wymiarów pokaźnej budowli. Okazało się, że jest ich 512 w przeliczeniu na klocki jednostkowe. Pytanie brzmi, jakie powinny być wymiary budowli, aby starczyło na nią 512 klocków? Pojawia się dylemat:

Gdy przypomnimy sobie wartości podstawowych kwadratów i sześcianów liczb, dotrzemy do prawdy:

A więc Maciuś może pozwolić sobie na niesamowitą budowlę o wymiarach klocków.

Operacja, której dokonaliśmy, aby poznać odpowiedź, to właśnie działanie odwrotne do potęgowania: dokonaliśmy pierwiastkowania liczby 512:

Powyższy zapis odczytujemy „pierwiastek trzeciego stopnia z 512 wynosi 8” i oznacza on właśnie tyle, że 8 podniesione do potęgi trzeciej daje 512.

Formalnie

Jeśli oraz są liczbami dodatnimi, stwierdzenie, że jest dokładnie równoważne równości . W taki właśnie sposób definiujemy pierwiastek: to taka liczba , dla której . Matematycznie zapiszemy definicję pierwiastka w jednej linijce:

Symbol oznacza równoważność, czyli stwierdzenie, że to, co po lewej stronie jest równoważne z tym, co po prawej stronie.

Nazewnictwo

Intuicje

O pierwiastkowaniu należy myśleć jak o działaniu, które przyjmuje dwa parametry i zwraca w odpowiedzi wynik. Liczba zapisana pod symbolem to *liczba podpierwiastkowa*, a liczba umieszczona „na dłoni” tego symbolu w lewym górnym rogu to *stopień pierwiastka*.

Ponieważ drugą potęgę liczby nazywamy kwadratem, a trzecią sześcianem tej liczby, analogiczne nazewnictwo wprowadzono dla pierwiastków: pierwiastek drugiego stopnia nazywamy *pierwiastkiem kwadratowym*, a pierwiastek trzeciego stopnia *pierwiastkiem sześciennym*. Co więcej, ponieważ pierwiastki kwadratowe spotyka się w matematyce najczęściej, zwyczajowo pomija się dwójkę do oznaczania pierwiastka drugiego stopnia. Zapisy: oraz oznaczają dokładnie to samo. Zazwyczaj kiedy mówimy po prostu „pierwiastek z 4” mamy na myśli właśnie pierwiastek kwadratowy.

W dziedzinie informatycznej do oznaczania pierwiastka drugiego stopnia stosuje się oznaczenie jako skrót od „square root” – pierwiastek kwadratowy. Jeśli chcesz obliczyć pierwiastek kwadratowy z 25 w wyszukiwarce lub w kalkulatorze internetowym, spróbuj wpisać .

Obliczanie pierwiastków

Intuicje

Przypomnijmy sobie tabelkę z wartościami kwadratów i sześcianów liczb naturalnych. Możemy przedstawić ją w równoważnej, nieco zmodyfikowanej formie:

Obliczanie pierwiastka jest bardzo łatwe, jeżeli pierwiastkujemy liczbę, którą rozpoznajemy jako odpowiednią potęgę liczby naturalnej. Sprawa robi się ciekawa, gdy zapytamy o wartość pierwiastka z liczby leżącej pomiędzy powyższymi.

Jaką wartość ma ? Innymi słowy, jaka liczba podniesiona do kwadratu daje 2? Zauważmy, że 1 podniesione do kwadratu daje 1, czyli mniej niż chcemy, a 2 podniesione do kwadratu daje 4, czyli więcej niż chcemy. Możemy więc podejrzewać, że tajemnicza wartość leży gdzieś pomiędzy 1 a 2, a więc z pewnością musi to być liczba z częścią ułamkową. A więc próbujemy:

* , czyli 1,5 to za dużo
* , czyli 1,2 to za mało
* , czyli 1,4 to wciąż za mało, chociaż jesteśmy już bardzo blisko
* , a więc 1,41 to już bardzo bliska wartość, choć wciąż za mała
* , czyli powinniśmy szukać pomiędzy 1,41 a 1,42

Grę w zgaduj zgadula moglibyśmy kontynuować jeszcze bardzo, bardzo długo. Gdyby starczyło nam cierpliwości, znaleźlibyśmy więcej cyfr mistycznej liczby :

Do tej pory zawsze, gdy obcowaliśmy z ułamkami dziesiętnymi, rozwinięcie dziesiętne albo kończyło się w pewnym miejscu, albo zaczynało zataczać pętle, ujawniając swój okres. Okazuje się, że w przypadku liczby nic takiego nie ma miejsca: rozwinięcie dziesiętne jest **nieskończone** i **nieokresowe**. Z powodu takiego zachowania wyróżnia się nowy rodzaj liczb: *liczby niewymierne*. Wprowadźmy istotne rozróżnienie:

* Liczby wymierne to takie, których rozwinięcie dziesiętne jest skończone lub posiada okres. Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka zwykłego, który posiada w liczniku oraz w mianowniku liczbę całkowitą;
* Liczby niewymierne posiadają nieskończone rozwinięcie dziesiętne, w którym nie ma okresu. Liczby niewymiernej nie da się zapisać jako ułamek zwykły mający w liczniku i mianowniku liczbę całkowitą.

Liczby wymierne i niewymierne obejmujemy wspólnym mianem *liczby rzeczywiste*. Praktycznie patrząc, liczba rzeczywista to każda liczba, którą da się zapisać w systemie dziesiętnym. W obserwowalnym świecie wszystko, co chcemy opisać przy pomocy pewnej miary – czy to długość, temperaturę, wagę, odcień koloru, poziom jasności czy ilość sąsiadek obgadujących nas za plecami – można wyrazić liczbą rzeczywistą. Liczby nierzeczywiste to już wyłącznie wymysły matematyków na poziomie czarnoksiężników.

Ostatecznie jednak nie odpowiedzieliśmy na pytanie, jak obliczać pierwiastki. Smutna lecz prawdziwa odpowiedź brzmi: na kalkulatorze. Metoda „zgaduj zgadula” przedstawiona przed chwilą to jedna z prostszych i bardziej efektywnych metod obliczania pierwiastków, gdy nie mamy pod ręką komputera. Miejmy na uwadze, że obliczenie pierwiastka czwartego stopnia przez zgadywanie wymagałoby podnoszenia do czwartej potęgi każdego kandydata…

W praktyce najczęściej spotykanymi pierwiastkami są pierwiastki kwadratowe i sześcienne. Gdy w przyszłości w trakcie obliczeń napotkamy np. , nie będziemy próbowali „obliczyć go” przez rozpisanie rozwinięcia dziesiętnego – zostawimy go w spokoju. Liczby niewymierne są w pewnym sensie nietykalne obliczeniowo.

Mimo wszystko dobrze jest mieć wyobrażenie, jak mniej więcej wyglądają niektóre pierwiastki:

Potęgi o wykładniku wymiernym

Intuicje

Pora rozwiązać zagadkę, która wywiązała się w temacie o potęgowaniu: co zrobić, gdy w wykładniku potęgi pojawia się ułamek? Spróbujmy rozgryźć wartość

Chwilowo liczba „trzy do potęgi jednej drugiej” pozostaje dla nas tajemnicą. Skorzystamy z pewnych własności potęgowania, które odkryliśmy jakiś czas temu: co by się stało, gdyby podnieść do kwadratu?

Skorzystaliśmy z własności

która mówi, że gdy potęgę podnosimy do potęgi, mnożymy przez siebie wykładniki. Odkryliśmy ciekawą rzecz: to taka liczba, że jak ją podniesiemy do kwadratu, dostaniemy 3. A przecież „liczba, która podniesiona do kwadratu, daje 3” to nic innego niż . Wniosek jest nieunikniony:

Trik stosuje się do wszystkich wykładników typu „jeden przez coś”:

* , a więc
* , a więc

W ogólności:

a więc

Poszerzmy nasze rozumowanie na wykładniki typu „coś przez coś”. Ponownie pomocna będzie własność dotycząca mnożenia wykładników:

W ogólności:

Dotarliśmy do bardzo przydatnego wzoru, który wskazuje przejście pomiędzy pierwiastkiem i potęgą:

To spostrzeżenie rozwiązuje przy okazji inny dylemat – jak traktować pierwiastki o stopniu wymiernym[[3]](#footnote-3):

Potęgi o wykładniku rzeczywistym

Rozszerzenie

Zbyt ciekawskie osoby, które lubią pytania „co by było gdyby” pewnie zastanawiają się, jak wykonuje się potęgowanie o wykładniku niewymiernym. Przykładowo, jak oblicza się ? Otóż: nie oblicza się. Najlepiej zostawić to w spokoju i nie tykać kijem, ale jeśli ktoś jest bardzo ciekaw wartości liczbowej takiego mutanta, może dokonywać przybliżeń. to około 1,41, więc to około . Jeśli zależy nam na dokładniejszym wyniku, musimy lepiej przybliżyć . Jeśli weźmiemy ,

to przybliżymy jako

Coraz dokładniejsze przybliżenia będą wywoływać coraz mniej znaczące modyfikacje w pożądanym wyniku.

Ograniczenia

Intuicje

Wykonywanie dzielenia narzucało dość istotną zasadę: nie wolno dzielić przez 0. Pierwiastkowanie również narzuca kilka ograniczeń, istnieją pierwiastki zabronione.

Wiemy już że dowolna liczba podniesiona do potęgi zerowej daje 1:

Dlatego, jak się dobrze zastanowić, nie ma sensu pytać o pierwiastek zerowego stopnia. Pierwiastek typu stawiałby pytanie „jaka liczba podniesiona do potęgi 0 daje 3?” z oczywistą odpowiedzią: „żadna”. Podobnie, pierwiastek stawia pytanie: „jaka liczba podniesiona do potęgi 0 daje 1?” na co odpowiedź brzmi „każda”. Ponieważ tego typu rozmówki podpadają pod paranoiczne, zabrania się pierwiastkowania z zerowym stopniem.

Wiemy także, że podnoszenie liczb ujemnych do parzystych potęg daje wynik dodatni:

Oczywiście podnoszenie liczb dodatnich do kwadratu także daje wynik dodatni. Uwzględniając 0, które podniesione do kwadratu daje 0, możemy stwierdzić ogólnie, że **każda** liczba podniesiona do kwadratu daje wynik nieujemny (dodatni lub zerowy). Co mógłby oznaczać pierwiastek z liczby ujemnej? to rzekomo taka liczba, która podniesiona do kwadratu daje -4… Trochę ciężko o takiego delikwenta, skoro podniesienie do kwadratu nie może dawać liczby ujemnej. Ustalamy więc zasadę: nie wolno wyciągać pierwiastków parzystego stopnia z liczb ujemnych.

Rygor ten nie dotyczy pierwiastków nieparzystego stopnia:

, ponieważ

Mimo wszystko pierwiastkowanie liczb ujemnych lub podnoszenie ich do ułamkowych potęg to stąpanie po cienkim lodzie. Przez nieuwagę bardzo łatwo można wpaść w pułapkę:

Właśnie za pomocą kilku przekształceń pokazaliśmy, że . Stwierdzenie „mieć ciastko i nie mieć ciastka to przecież to samo” brzmi cokolwiek nihilistycznie, dlatego miejmy na uwadze rolę licznika i mianownika w wykładniku we wzorze

Gdy podnosimy liczbę do potęgi ułamkowej, powinniśmy najpierw dokonać pierwiastkowania ze względu na mianownik, a dopiero później potęgowania ze względu na licznik. Kolejność ta nie ma znaczenia dla dodatnich , jednak zmienia dużo w przypadku poniżej zera.

Rozszerzenie

Tak naprawdę… wolno wyciągać pierwiastki parzystego stopnia z liczb ujemnych. Ale w tym momencie wychodzimy poza rozważania na temat liczb rzeczywistych. W lekcji „Liczby zespolone” dowiemy się, że liczbę traktuje się w sposób specjalny, jak upośledzone dziecko matematycznych rozkoszy cielesnych matematyka po czterdziestce ze swoją niewyżytą wyobraźnią. Pierwiastki z liczb ujemnych nazywamy (całkiem poważnie) *liczbami urojonymi*, a dla wprowadzono specjalne oznaczenie: , literka na cześć słowa „imaginary” – wyimaginowany, urojony. Aby zajmować się liczbami zespolonymi na poważnie, trzeba przebyć jeszcze dość długą drogę.

Własności pierwiastkowania

Formalnie

Skoro już wiemy, że każdy pierwiastek można przedstawić w postaci potęgi, nie powinno dziwić, że własności potęgowania przenoszą się na adekwatne własności pierwiastkowania.

Uzasadnienie:

Uzasadnienie:

Uzasadnienie:

Wyłączanie czynnika przed pierwiastek

Warsztat

Obliczanie pierwiastków istotnie sprowadza się do wklepania liczb do kalkulatora, zaś my jako śmiertelnicy możemy jedynie starać się o sprowadzenie wyrażenia do najprostszej postaci – podobnie, jak ułamki zwykłe sprowadzamy do postaci nieskracalnej, bo tak wyglądają „ładniej”, chociaż wartość dziesiętną obliczamy tak czy inaczej na kalkulatorze.

Upraszczanie pierwiastków wykorzystuje drugą z wyżej wymienionych własności pierwiastkowania:

Liczba 20 jest liczbą złożoną, a jednym z jej czynników składowych jest 4 – czyli dobrze znany nam kwadrat 2. Możemy więc dokonać uproszczenia nazywanego wyłączaniem czynnika przed pierwiastek i zapisać w postaci . Zaleta jest m.in. taka, że mało kto zna na pamięć wartość , ale są tacy, którzy pamiętają przybliżenie , co pozwala na oszacowanie .

Aby najpełniej wyłączyć czynnik przed pierwiastek, musimy dokonać rozkładu na czynniki pierwsze liczby podpierwiastkowej. Spróbujmy uprościć . Najpierw dokonujemy rozkładu:

|  |  |
| --- | --- |
| 6804 | 2 |
| 3402 | 2 |
| 1701 | 3 |
| 567 | 3 |
| 189 | 3 |
| 63 | 3 |
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 |  |

Interesują nas te czynniki pierwsze, które występują przynajmniej w drugiej potędze – to właśnie je będziemy wyłączać przed pierwiastek.

Możemy też wyłączać przed pierwiastek trochę bardziej „na żywioł”. Weźmy .

* Sprawdzamy, czy liczba podpierwiastkowa dzieli się przez 4. 20250 nie jest podzielne przez 4, więc nie wyciągniemy dwójki przed pierwiastek.
* Sprawdzamy więc, czy 20250 dzieli się przez 9 – skoro tak, wyciągamy .
* Do skutku próbujemy wyciągnąć 9 spod pierwiastka, przy kolejnej próbie: .
* Więcej razy nie wyciągniemy 9 spod pierwiastka, więc próbujemy wyciągać kwadrat kolejnej liczby pierwszej: 25. Odnosimy zwycięstwo: .
* Pierwiastek z 10 dość zauważalnie jest już nierozkładalny.

Wyciąganie niewymierności z mianownika

Warsztat

[wymagana znajomość tematu: Działania na wyrażeniach algebraicznych]

Oprócz wyłączania czynnika przed pierwiastek, stosuje się jeszcze jeden zabieg mający sprawić, że liczba będzie zapisana „ładnie”. Otóż matematycznie nieeleganckie jest pozostawianie pierwiastków w mianowniku ułamka. Liczbę

można zapisać w innej postaci rozszerzając licznik i mianownik przez :

Ułamki oraz reprezentują dokładnie tę samą liczbę, jednak zapis w drugiej formie ma zasadniczą przewagę: pozwala na dokładniejsze szacowanie wartości. Przypuśćmy, że chcemy poznać przybliżoną wartość dziesiętną liczby , w tym celu musimy najpierw dokonać przybliżenia :

* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy

Im więcej weźmiemy cyfr rozwinięcia , tym wierniej przybliżymy rzeczywistą wartość . Biorąc przybliżenie

otrzymamy

I wynik ten możemy uznać za zadowalająco dokładny. Sprawdźmy dla porównania, jak wygląda szacowanie liczby :

* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy

Oprócz tego, że obliczanie przybliżonych wartości jest znacznie łatwiejsze od obliczania (mnożenie przez ułamek dziesiętny jest prostsze, niż dzielenie przez ułamek dziesiętny), daje także dokładniejsze wyniki. Zbierzmy wnioski w tabeli:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Szacowanie** | **Szacowanie** | **Różnica od dokładnego wyniku** | **Szacowanie** | **Różnica od dokładnego wyniku** |
|  |  | 0,0215367993 |  | 0,02132034356 |
|  |  | 0,00633923091 |  | 0,00632034356 |
|  |  | 0,00032039194 |  | 0,00032034356 |
|  |  | 0,00002034375 |  | 0,00002034355 |

Przybliżenia otrzymane po wyciągnięciu niewymierności z mianownika różnią się mniej od dokładnego wyniku, niż przybliżenia z pierwiastkiem w mianowniku.

W większości przypadków wyciąganie niewymierności z mianownika jest łatwe i sprowadza się do odpowiedniego rozszerzenia licznika i mianownika:

Nieco kłopotliwe jest usuwanie z mianownika pierwiastka będącego składnikiem sumy:

Idea wyciągania niewymierności z mianownika polega na takim zmodyfikowaniu ułamka, aby pierwiastek w mianowniku uległ podniesieniu do potęgi i zniknął. Łatwo się przekonać, że rozszerzenie powyższego ułamka przez mianownik nie jest skuteczną metodą - postępując w ten sposób, uzyskujemy niewymierność zarówno w mianowniku, jak i w liczniku ułamka. Możemy jednak z powodzeniem skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

Rozszerzamy licznik i mianownik ułamka przez różnicę składników w mianowniku, a następnie korzystamy ze wzoru

dzięki któremu pierwiastek w mianowniku znika.

Warsztat | Rozszerzenie

[wymagana znajomość tematu: Działania na wyrażeniach algebraicznych]

Jeśli jakiemuś nieszczęśnikowi przyjdzie kiedyś wyciągać niewymierność z mianownika, w którym jako składnik sumy występuje pierwiastek inny niż kwadratowy – szczerze współczujemy. Wzór na różnicę kwadratów

należy wówczas zastąpić odpowiednim wzorem na różnicę wyższych potęg. Dla pierwiastków trzeciego stopnia przydatne będą wzory

Dla pierwiastków czwartego stopnia:

itd.

1. Właściwie patrząc na dzisiejsze ceny, może starczyłoby na kapsułę ratunkową… [↑](#footnote-ref-1)
2. Ponieważ dobrze wiedzieli, że Maciuś nigdy nie zostanie wielkim architektem [↑](#footnote-ref-2)
3. Z należytym szacunkiem [↑](#footnote-ref-3)